La Convolution

I] Convolution de deux fonctions :

Déf :

Le produit de convolution de deux fonctions f et g est une autre fonction notée par $(f*g)$ qui est définie par : $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$

RQ :

1 Ce produit de convolution n'existe pas tjrs

Théorème (admis) :

soient f et g 2 fonctions localement intégrables,
Alors le produit $(f*g)$ existe si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) f et g sont toutes les deux à support borné

2i) f et g " " à support bornée à gauche
à support bornée à droite

3i) " "

Propriétés :

1) si $(f*g)$ existe, alors $(f*g) = (g*f)$

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

on pose $y = x - t$, $dy = -dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,f(x-y)\,dy = (g*f)(x)$$

2) Le produit de convolution est bilinéaire, c'à d :

$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha (f*h) + \beta (g*h)$$

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha (f*g) + \beta (f*h)$$

CamScanner

3) $(f*g)$ est paire (resp impaire) si f et g sont de même parités (resp de parité différents)

f est imp et g est imp $\begin{cases} f(-t) = -f(t) \\ g(-t) = -g(t) \end{cases}$ même parité

$(f*g)(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(-x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(-(x+t))\,dt$

$= f*g(x)$

$\overset{u=-t}{\underset{du=-dt}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-u) g(-x+u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1) f(u)(-1) g(x-u)\,du$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x-u)\,du = (f*g)(x)$

Ex 1 :

Notons $\tau_a f(t) = f(t-a)$

Mq $((\tau_a f) * g) = \tau_a (f*g)$

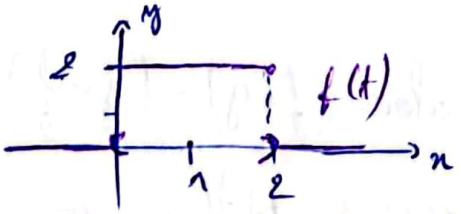
on a $(\tau_a f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_a f(t) g(x-t)\,dt$

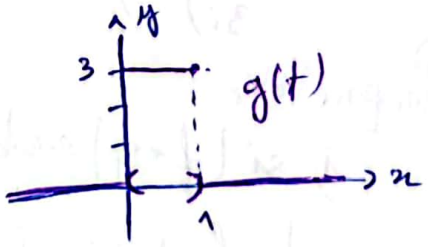
$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a) g(x-t)\,dt \overset{y=t-a}{\underset{dy=dt}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-(y+a))\,dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g((x-a)-y)\,dy = (f*g)(x-a) = \tau_a (f*g)(x)$

Ex 2 :

Soient f et g les fonctions suivantes :





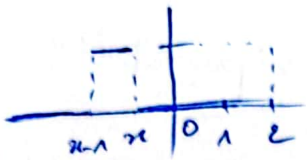
Calculer $(f*g)$?

$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad g(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on a : $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\,dt$ → ou bien $g(t)f(x-t)$ Dima elli rapres nta3ha ashal nasthon fcha $(x-t)$

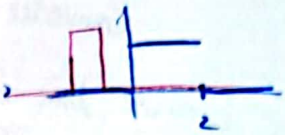
$g(x-t) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le x-t \le 1 \Rightarrow x-1 \le t \le x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

CamScanner



Notons par : $I_1 = [0,2]$ et $I_2 = [x-1, x]$, Alors on a :

① si $x < 0 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow (f*g)(x) = 0$ →



② si $x-1 \leq 0$ et $x > 0 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = [0, x]$ →

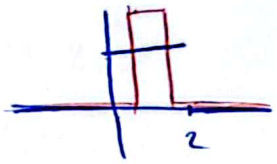
$\Rightarrow (f*g)(x) = \int_0^x 2 \times 3 \, dt = 6 \int_0^x dt = 6x$ →



③ si $x-1 > 0$ et $x \leq 2$

$x > 1$ et $x \leq 2 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$

Alors $I_1 \cap I_2 = [x-1, x]$ →

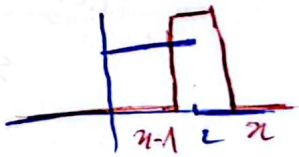


$\Rightarrow (f*g)(x) = \int_{x-1}^{x} 6 \, dt$

$= 6 [t]_{x-1}^{x} = 6(x - (x-1)) = 6$

④ si $x-1 < 2$ et $x > 2$ $\Leftrightarrow 2 < x < 3$ →

$x < 3$ et $x > 2$



$I_1 \cap I_2 = [x-1, 2]$

$(f*g)(x) = \int_{x-1}^{2} 6 \, dt = 6 [t]_{x-1}^{2} = 6(2 - x + 1) = 6(3-x)$

⑤ si $x - 1 > 2 \Leftrightarrow x > 3$

$I_1 \cap I_2 = \emptyset \Rightarrow (f*g)(x) = 0$

I] Convolution de deux distributions :

Déf : Soient S et T 2 distributions :

On définit le produit de convolution de S avec T, notée par $S * T$, la distribution définie par :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

(resp T_y)

où S_x signifie que la distribution S ne s'applique qu'à (resp T)

la variable x (resp y)

Théorème : (admis)

1) Les dist à support bornée à gauche (resp à droite) peuvent être convolées entres elles.

2) Une distribution à support bornée peut être convolée avec n'importe quelle dist.

Exc :

Calculer $\delta_a * \delta_b$?

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_{a,x}, \langle \delta_{b,y}, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \langle \delta_{a,x}, \varphi(x+b) \rangle = \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle$$

Donc $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

Théorème : (admis)

soit S, T, U, 3 distribution :

1) si $S * T$ existe, Alors : $S * T = T * S$

2) si $(S * T), (S * U)$ et $(T * U)$ existent Alors :

$$S * T * U = (S * T) * U = S * (T * U)$$

3) Si $(S * T)$ existe, alors on a :

$$(S * T)^{(n)} = S^{(n)} * T = S * T^{(n)} \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

RQ : (dist de Dirac)

on a :

i) $T * \delta = \delta * T = T$

$$\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle \delta_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \langle T_x, \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

2i) $T^{(n)} = T^{(n)} * \delta = T * \delta^{(n)}$

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

App 1 :

Mq :

$\tau_a T = \delta_a * T = T * \delta_a$?

on a : $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T * \delta_a, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle \delta_{a,y}, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$
$$= \langle T_x, \varphi(x+a) \rangle = \langle T_x, \tau_{-a} \varphi(x) \rangle$$
$$= \langle \tau_a T, \varphi \rangle$$

App 2 :

Calculer $\delta_a' * \delta_b'$?

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle \delta_a' * \delta_b', \varphi \rangle = \langle \delta'_{a,x}, \langle \delta'_{b,y}, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$
$$= - \langle \delta'_{a,x}, \langle \delta_{b,y}, \varphi'(x+y) \rangle \rangle$$
$$= - \langle \delta_{a,x}', \varphi'(x+b) \rangle = \langle \delta_{a,x}, \varphi''(x+b) \rangle$$
$$= \varphi''(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi''(x) \rangle = \langle \delta_{a+b}'', \varphi \rangle$$

Alors $\delta_a' * \delta_b' = \delta_{a+b}''$

Autrement :

$$\delta_a' * \delta_b' = \delta_a'' * \delta_b = (\delta_a * \delta_b)'' = (\delta_{a+b})'' = \delta_{a+b}''$$

App 3 :

① Calculer : $\delta' * T_1$ et $\delta' * T_H$

② Calculer : $(T_1 * \delta') * T_H$ et $T_1 * (\delta' * T_H)$

Conclure

① $\delta' * T_1 = \delta * T_1' = (\delta * T_1)' = T_1' = 0$

$\delta' * T_H = \delta * T_H' = \delta * \delta = \delta$

② $(T_1 * \delta') * T_H = 0$

$T_1 * (\delta' * T_H) = T_1 * \delta = T_1$

$\Rightarrow (T_1 * T_H)$ n'existe pas ??

CamScanner

Feuille d'exercices N 2

Exercice 1 Calculer $f * g$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Corrigé :

$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt$ avec $f(x-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x-3 \leq t \leq x+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{si } t \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notons par : $I_1 = [0,2]$ et $I_2 = [x-3, x+1]$

1ère Cas : si $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Alors $(f*g)(x) = 0$

2ème Cas : si $0 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$I_1 \cap I_2 = [0, x+1] \Rightarrow (f*g)(x) = \int_0^{x+1} \frac{t}{2}\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^{x+1} = \frac{(x+1)^2}{4}$

3ème Cas : si $x-3 \leq 0$ et $x+1 \geq 2 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = [0,2]$

Alors $(f*g)(x) = \int_0^2 \frac{t}{2}\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^2 = 1$

4ème Cas : si $x-3 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = [x-3, 2]$

Alors, $(f*g)(x) = \int_{x-3}^{2} \frac{t}{2}\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_{x-3}^{2} = 1 - \frac{(x-3)^2}{4}$

5ème Cas : si $x-3 > 2 \Rightarrow x > 5 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Alors, $(f*g)(x) = 0$

Conclusion :

$$(f*g)(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 - \frac{(x-3)^2}{4} & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

CamScanner

RQ :

$\text{supp } T_H = ?$; $\text{supp } T_H = (\text{plus grand ouvert où } T_H = 0)^c$

Soit Ω un ouvert tq $T_H = 0$ sur Ω $\Rightarrow \langle T_H, \varphi \rangle = 0 \; \forall \varphi$ avec $\text{supp } \varphi \subset \Omega$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \Rightarrow \text{supp } \varphi \subset]-\infty, 0[$

$\Rightarrow \text{supp } T_H = [0, +\infty[$

Exercice 2

Soit T une distribution et T_H la distribution Heaviside. Montrer que $T_H * T$ est une primitive de T.

Corrigé :

$(T_H * T)' = T_H' * T = \delta * T = T$

Exercice 3

Montrer que , si S et T appartiennent à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors

$$e^{ax}(S * T) = (e^{ax}S) * (e^{ax}T)$$

Corrigé : $x \longmapsto e^{ax}$ et e^{ax} ? $\Rightarrow e^{ax}(S*T) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a : $\langle e^{ax}(S*T), \varphi \rangle = \langle S*T, e^{ax}\varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, e^{a(x+y)}\varphi(x+y) \rangle$

$= \langle S_x, \langle T_y, e^{ax}e^{ay}\varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle S_x, e^{ax}\langle e^{ay}T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle e^{ax}S_x, \langle e^{ay}T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$= \langle e^{ax}S_x * e^{ay}T_y, \varphi \rangle = \langle e^{ax}S * e^{ax}T, \varphi \rangle$

Exercice 4

On désigne par $T_{H^{*(n)}}$ le produit de convolution de T_H par elle même n fois pour $n \geq 1$:

$$T_{H^{*(n)}} = T_H * T_H * T_H * \ldots * T_H$$

Montrer que la dérivée d'ordre n de $T_{H^{*(n)}}$ est égale à δ.

Corrigé : pour $n = 1$; $(T_H)' = \delta$ (vrai)

Supposons que $\left(T_H^{*(n)}\right)^{(n)} = \delta$ et montrons que $\left(T_{H^{*(n+1)}}\right)^{(n+1)} = \delta$?

$\left(T_{H^{*(n)}} * T_H\right)^{(n+1)} = \left(\left(T_{H^{*(n)}}\right)^{(n)} * T_H\right)' = \left(\delta * T_H\right)' = \left(T_H\right)' = \delta$

CamScanner

Chap I :

Distribution

I) L'espace de fonction Test $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

Déf : (support d'une fonction) :

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0\}}$: c'est le support de f

RQ :

1) support de f est un ensemble fermé

2) on dit que f est à support compact (bornée) :
si $\operatorname{supp}(f) = [A, B]$, $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$

(c'à d :
f est à support compact ssi :
$\exists\, [A, B]$ tq $f(x) = 0$, $\forall x \notin [A, B]$)

Déf : L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions Tests est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

(c'à d : $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et il existe $[A, B]$ tel que $f(x) = 0$ $\forall x \notin [A, B]$)

exemple :

- soit $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \chi_{[0,1]}(x)$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\operatorname{supp} \mathbb{1}_{[0,1]} = \overline{[0,1]} = [0,1]$

$\operatorname{supp} \mathbb{1}_{[0,1]} = \overline{]0,1]} = [0,1] = \operatorname{supp} \mathbb{1}_{]0,1[}$

exemple :

$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \mathbb{1}_{]-1,1[}(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?

CamScanner

on a : + $\text{supp}(f) = [-1, 1]$

+ Mq f est $\mathcal{C}^\infty$?

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$ $\quad (x^2 - 1 \to 0^-)$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} \mathbb{1}_{]-1,1[}(x)$$

$$f^{(k)}(x) = F(x) e^{\frac{1}{x^2-1}} \mathbb{1}_{]-1,1[}(x)$$

↑ fraction rationnel

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f^{(k)}(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f^{(k)}(x) = 0 \end{array}\right\}$ $f^{(k)}$ est continue $\forall k$

$\Rightarrow f$ est $\mathcal{C}^\infty$

Donc f est une fonction Test

Proposition :

1) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un e.v

(càd : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $(\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$)

2) Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Alors $fg \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

3) Si $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $fg \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

CamScanner

Déf :

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et on note $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ si f est intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$

c'à d :

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;/\; \int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$$

RQ :

1) $C(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ avec $C(\mathbb{R})$: l'ensemble de fonction continues

2) $L^1(\mathbb{R})$: ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$

$$\left(L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;/\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty \right\} \right)$$

on a : $L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$

exemple :

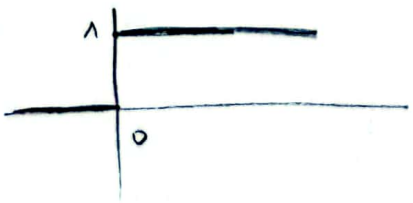
① • pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto f(x) = 1$ c'à d $f \equiv 1$

$\rightarrow f \notin L^1(\mathbb{R})$

$\rightarrow$ soit $[a,b]$: intervalle sur $\mathbb{R}$

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b dx = (b-a) < +\infty \Rightarrow f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

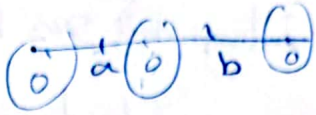
② soit $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$: c'est la fonction de Heaviside



Mq H est $L^1_{loc}(\mathbb{R})$?

soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$

Mq : $\int_a^b H(x)\,dx < +\infty$?



on a :

$$\int_a^b H(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } b < 0 \\ \int_0^b dx = b & \text{si } a < 0 < b \\ \int_a^b dx = (b-a) & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Cl : H est loc intégrable sur $\mathbb{R}$

Déf :

on dit qu'une suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ssi

i) les supports de tous les φ_n et le support de φ sont inclus ds un compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$

ii) $(\varphi_n)_n$ et toutes ses dérivées convergent uniformément vers φ et toute ses dérivées respectivement

càd :

$$\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi \text{ ssi } \begin{cases} \text{i) il existe } [a,b] \text{ de } \mathbb{R} \text{ tq} \\ \quad \text{supp}(\varphi_n) \subset [a,b],\ \forall n \text{ et} \\ \quad \text{supp}(\varphi) \subset [a,b] \\ \text{ii) } \sup_{x \in [a,b]} \left| \varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x) \right| \to 0, \\ \qquad \forall k \end{cases}$$

Proposition :

Si $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$, Alors :

$$\varphi_n' \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi'$$

CamScanner

II] L'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des distributions :

Déf et propriétés :

Déf : On appelle distribution sur $\mathbb{R}$ toute forme linéaire et continue T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$

c'à d :

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$$

T est une distribution ssi :

i) $\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

ii) $\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$
$\forall \varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi$

et on note $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: l'ensemble de toute les dist sur $\mathbb{R}$.

Proposition :

1/ $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un e.v

$\left(\begin{array}{l} \forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ on a } [T_1 + T_2] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}, T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ on a } \alpha T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \end{array} \right)$

2/ soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

T est nulle ssi : $\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

T est nulle sur un ouvert $\mathcal{O}$ ssi :

$\left(\begin{array}{l} \langle T, \varphi \rangle = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \text{avec } \operatorname{Supp} \varphi \in \subset \mathcal{O} \end{array} \right)$

CamScanner

3/ soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$T_1 = T_2$ ssi : $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

($T_1 = T_2$ sur un ouvert Ω ssi :
$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$)

Exemples des distributions :

Distributions régulières :

Déf :

soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, l'application

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

est une distribution (c'à d : $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$),
appelée dist régulière associé à f

exemple :

- pour $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc on peut associé à H
une dist notée T_H définie par :

$$\langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, \varphi(x)\, dx \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$: distribution Heaviside

- on a : $x \longmapsto \sin x$ est loc intg sur $\mathbb{R}$

donc on peut lui associe une dist notée par $T_{\sin}$ definie par :

$$\langle T_{\sin}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, \varphi(x)\, dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

: c'est la dist sin

Ex :

Mq : T_H et T_1 sont égaux sur $]0,+\infty[$?

- $T_H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- $\forall x \longmapsto 1$ est loc intg sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ / $\text{supp}(\varphi) \subset]0,+\infty[$

Mq $\langle T_H, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle$?

on a $\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \langle T_1, \varphi \rangle$

$\text{supp}\,\varphi \subset]0,+\infty[$

$(\forall x \notin]0,+\infty[\quad \varphi(x) = 0)$

Exemples de dist non régulière : (dist singulière)

Déf : (dist de Dirac)

soit $a \in \mathbb{R}$, on note par :

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

Alors $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: c'est la distribution de Dirac en a

Notation :

Si $a = 0$, on note : $\delta_0 = \delta$: dist de dirac

Operations sur les distributions :

support d'une distribution :

soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on appelle support de T et on note $\text{supp}(T)$ le complémentaire de plus grand ouvert sur lequel T s'annule

exemple :

Mq δ_a est nulle sur $]a,+\infty[$ et $]-\infty,a[$ et en déduire $\text{supp}(\delta_a)$ = ?

Reponse :

- soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ / $\text{supp}\,\varphi \subset]a, +\infty[$, on a :
  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0$ car $\{a\} \notin \text{supp}\,\varphi$] $\Rightarrow$ δ_a est nulle sur $]a, +\infty[$
- soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ / $\text{supp}\,\varphi \subset]-\infty, a[$
  on a $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0$ car $\{a\} \notin \text{supp}(\varphi)$
  $\Rightarrow$ δ_a est nulle sur $]-\infty, a[$

- $\text{supp}(\delta_a) = (\mathbb{R}/\{a\})^c = \{a\}$
  $\Rightarrow \text{supp}(\delta_a) = \{a\}$

$\Rightarrow$ Produit d'une distribution par une fonction de $\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$:

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, soit $g \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$ Alors :
gT est une distribution
$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Exemple :
pour $T = \delta_a$, et $g \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$
déterminer $(g\delta_a)$?

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\langle g\delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, g\varphi \rangle = g(a)\varphi(a)$
$= g(a) \underbrace{\langle \delta_a, \varphi \rangle}_{\varphi(a)} = \langle g(a)\delta_a, \varphi \rangle$

Alors : $g\delta_a = g(a)\delta_a$

Translation :

$\tau_a f(t) = f(t-a)$
pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a : $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_a \varphi \rangle$

CamScanner

En effet :

$$\langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_a f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\, \varphi(x)\, dx \Big| \begin{matrix} y = x-a \\ dy = dx \end{matrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi(y+a)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \tau_{-a} \varphi(y)\, dy = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle$$

Exp :

Mq $\tau_a \delta = \delta_a$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle \tau_a \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-a} \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi(x+a) \rangle$$

$$= \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

Symétrie :

$$\sigma(f)(t) = f(-t)$$

on a $\langle \sigma(T), \varphi \rangle = \langle T, \sigma(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

En effet :

$$\langle T_{\sigma(f)}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(f)(t)\, \varphi(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\, \varphi(t)\, dt \Big| \begin{matrix} x = -t \\ dx = -dt \end{matrix}$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)\, \varphi(-x)\, (-1)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \sigma(\varphi)(x)\, dx = \langle T_f, \sigma(\varphi) \rangle$$

CamScanner

App :

Mq $\sigma(\delta) = \delta$ (c'à'd δ est paire)

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\langle \sigma(\delta), \varphi \rangle = \langle \delta, \sigma(\varphi) \rangle$

$= \langle \delta, \varphi(-x) \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$

Dilatation :

$h_a(f)(t) = f(at)$, $a \neq 0$

soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\langle h_a T, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

En effet :

$\langle T_{h_a f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\varphi(t)dt \quad \Big| \begin{matrix} y = at \\ dy = a\,dt \end{matrix}$

$= \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(\frac{y}{a})dy & \text{si } a > 0 \\ = \frac{1}{a}\langle T_f, h_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle & \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) h_{\frac{1}{a}}(\varphi(y))dy & \text{si } a < 0 \\ = -\frac{1}{a}\langle T_f, h_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle & \end{cases} = \frac{1}{|a|}\langle T_f, h_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle$ si $a \neq 0$

App :

$h_a \delta = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$\langle h_a \delta, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|}\langle \delta, h_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle = \frac{1}{|a|}\langle \delta, \varphi(\frac{x}{a}) \rangle$

$= \frac{1}{|a|}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \frac{1}{|a|}\delta, \varphi \rangle$

Dérivée d'une distribution :

Déf Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dérivable et la distribution dérivée notée T' vérifie :

$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

CQFD

si $T \in \mathcal{D}' \Rightarrow T$ est dérivable et $T' \in \mathcal{D}'$

T' est dérivable $\rightsquigarrow T'' \in \mathcal{D}'$

$\langle T'', \varphi \rangle = \langle (T')', \varphi \rangle = -\langle T', \varphi' \rangle = (-1)^2 \langle T, \varphi'' \rangle$

Proposition :

Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est indéfiniment dérivable et la dist dérivée de T d'ordre n, notée $T^{(n)}$,

$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Proposition :

soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R})$

la dérivée de la distribution gT est donnée par :

$(gT)' = g'T + gT'$

Dem :

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

~~$\langle (gT)', \varphi \rangle = -\langle gT, \varphi' \rangle$~~

~~$= -\langle T, g\varphi' \rangle$~~

$\langle gT', \varphi \rangle = \langle T', g\varphi \rangle = -\langle T, (g\varphi)' \rangle$

$= -\langle T, g'\varphi + g\varphi' \rangle$

$= -\langle T, g'\varphi \rangle - \langle T, g\varphi' \rangle$

$= -\langle g'T, \varphi \rangle - \langle gT, \varphi' \rangle$

$= -\langle g'T, \varphi \rangle + \langle (gT)', \varphi \rangle$

$= \langle (gT)' - g'T, \varphi \rangle$

$\Rightarrow gT' = (gT)' - g'T \Rightarrow (gT)' = gT' + g'T$

Exemples :

a) dérivée de la dist Heaviside :

$\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$

$T_H \in \mathcal{D}'$ donc elle est derivable

$T'_H = ?$

RQ :
en tant qu'une fonction H n'est pas derivable car elle n'est pas continu en 0

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle T'_H, \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$$

$$= -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = -\left(\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) - \varphi(0)\right) \text{ or } \lim_{+\infty} \varphi(x) = 0 \text{ car } \varphi \text{ a supp compact}$$

$$= \varphi(0)$$

$$\Rightarrow \langle T'_H, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Donc : $T_H' = \delta$

Exercice :
Calculer les dérivées successifs de δ.

CamScanner

b) si f est de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors :

$$(T_f)' = T_{f'}$$

Exemples :

$x \longmapsto \sin x$ est continue donc loc intg sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow T_{\sin x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

avec $\langle T_{\sin x}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \varphi(x) \, dx$

Comme $x \longmapsto \sin x$ est $\mathcal{E}'$, alors :

$$(T_{\sin x})' = T_{(\sin x)'} = T_{\cos x}$$

c) Dérivée en sens de distribution d'une fonction discontinue :

Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ tq $f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

et $f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$ existent et sont finies

Comme $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Donc T_f est dérivable - $T_f' = ?$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T_f', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_{-\infty}^{a} f(x) \varphi'(x) \, dx - \int_{a}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx$$

1er) f est $\mathcal{E}'$ sur $]-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x) \varphi'(x) \, dx = [f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} f'(x) \varphi(x) \, dx$$

IPP $\left[\begin{array}{c} f \longrightarrow f' \\ \varphi' \longrightarrow \varphi \end{array} \right.$

$$= f(a^-) \varphi(a) - \int_{-\infty}^{a} f'(x) \varphi(x) \, dx \quad (\text{comme } \varphi \text{ a supp compact } \lim_{-\infty} \varphi = 0$$